# Množice in relacije

**1.** Naj bodo $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$, $B = \{x \mid x \text{ je liho celo število in } 3 \leq x \leq 10\}$ in $C = \{a, b, c, 4, 5, 6\}$.

(a) Izpolnite prazna mesta $\_$ z najprimernejšim simbolom ($\in, \notin, \subseteq, \not\subseteq$):
$7 \_ A$, $6 \_ B$, $10 \_ B$, $4 \_ A$, $b \_ C$, $b \_ B$, $\{2, 5, 12\} \_ A$, $\{3, 5, 6\} \_ B$, $\{a, b, 5\} \_ C$.

(b) Izračunajte $A \cup B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A \cap B)$, $(A \cap B) \times \{a, b\}$.

**2.** (a) Naj bosta $A$ in $B$ dani množici. Pokažite, da je $A \cap (B/A) = \emptyset$. Razložite vsak korak svojega dokaza.

(b) Naj bosta $A$ in $B$ dani podmnožici univerzalne množice $U$. Pokažite, da je $A \subseteq B$, če in samo če $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Razložite vsak korak svojega dokaza.

**3.** Utemeljite, ali za poljubne množice $A$, $B$ in $C$ velja trditev

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq \overline{A} \cup C.$$

Razložite vsak korak svojega dokaza.

**4.** Naj bo $A$ neprazna množica. Ugotovite, katere od množic

$$\emptyset, \{\emptyset\}, A, \{A\}, \{A, \emptyset\}$$

so elementi in katere podmnožice množic $\mathcal{P}(A)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

**5.** Utemeljite, ali je naslednja izjava resnična ali neresnična:

Če za množici $X$ in $Y$ velja $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$, potem sta množici $X$ in $Y$ enaki.

**6.** V potenčno množico $\mathcal{P}(M)$ množice $M = \{1, 2\}$ vpeljemo relacijo $R$ s predpisom

$$ARB \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \cup \{1\} = B \cup \{2\}.$$

Napišite vse urejene pare v $R$.

**7.** Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ definiramo relacijo $\sim$:

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad a - b \in \mathbb{Z}.$$

Utemeljite, ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Če je $\sim$ ekvivalenčna relacija, poiščite ekvivalenčna razreda $[\frac{1}{2}]_\sim$ in $[\sqrt{2}]_\sim$.

# Popolna matematična indukcija

**8.** Pokažite, da je število $3^{7^{999}} - 1$ deljivo z 2. Nalogo rešite z uporabo matematične indukcije.

**9.** Dokažite, da za vsako naravno število $n > 1$ velja enakost

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

**10.** Pokažite, da je vsota $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2 \cdot 7^7 - 1)$ deljiva s $7^7$. Nalogo rešite z uporabo matematične indukcije.

**11.** Pokaži, da je število $37^{500} - 37^{100}$ deljivo z 10.